Correction de la petite interro

- L'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0$$

est

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda \exp(-A(x)) \end{array}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{avec } A(x) = \int_0^x a(t)\, dt \text{ une primitive de } a$$

- C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, l'équation caractéristique associée est $r^2 + 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r+1)^2 = 0$, -1 est racine double. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$$

est

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (\lambda x + \mu)e^{-x} \end{array}, \lambda,\, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

- On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x)$, on injecte y_p dans l'équation différentielle pour déterminer A et B.

$$\left\{ \begin{array}{l} y_p'(x) = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x \\ y_p''(x) = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x \end{array} \right.$$

On obtient

$$\begin{aligned} & -4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 2(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) + A\cos 2x + B\sin 2x = 5\sin 2x \\ \Leftrightarrow & (-4A + 4B + A)\cos 2x + (-4B - 4A + B)\sin 2x = 5\sin 2x \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{ll} -3A + 4B & = 0 \\ -4A - 3B & = 5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} A & = \frac{4}{3}B \\ -4\frac{4}{3}B - 3B & = -\frac{25}{3}B = 5 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & B = -\frac{3}{5} \text{ et } A = -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \sin(2x)$$

est

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (\lambda x + \mu)e^{-x} - \frac{4}{5}\cos 2x - \frac{3}{5}\sin 2x \end{array}, \lambda,\, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

- La fonction sinus réalise une bijection entre $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $[-1,1]$. La fonction arcsinus est, par définition, la réciproque de cette bijection. Elle est donc définie sur $[-1,1]$. Elle y est continue. Elle est dérivable sur $]-1,1[$ (attention, pas sur l'intervalle tout entier ! La fonction sinus a des tangentes horizontales en $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ donc arcsinus a des tangentes verticales en -1 et 1.), et pour tout $x \in]-1,1[$, $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- Pour tout x réel, on a $\sin(\arcsin(x)) = x$ (c'est la définition). Par contre, attention, $\arcsin(\sin(x))$ n'est égal à x que pour $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

  Pour x quelconque, on a :

$$\begin{aligned}\arcsin(\sin(x)) = a &\Leftrightarrow \sin(x) = \sin(a)\\ &\Leftrightarrow x = a + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - a + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow a = x + 2k\pi \text{ ou } a = -x + (2k+1)\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow (-1)^k x + k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

  Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arcsin(\sin(x)) = (-1)^k x + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
- Pour résoudre l'équation, on applique le résultat de la question précédente.

$$\begin{aligned}\arcsin\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{3} &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, (-1)^k \frac{x}{2} + k\pi = \frac{\pi}{3}\\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = (-1)^k \frac{2\pi}{3} - 2k\pi\end{aligned}$$

  Ainsi, les solutions de cette équation dans $[-2\pi, 2\pi]$ sont $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$, qui correspondent respectivement à $k=0$ et $k=-1$.
- Comme $x^2+2x+1 = (x+1)^2$, on a $\sqrt{x^2+2x+1} = |x+1|$. Ainsi, la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+2x+1}$ est définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues, et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (la valeur absolue est continue partout mais n'est pas dérivable en 0).

  L'expression $\ln(\sin(2x))$ est définie quand $\sin(2x) > 0$

$$\begin{aligned}\sin(2x) > 0 &\Leftrightarrow 2x \in]0, \pi[\text{ modulo } 2\pi\\ &\Leftrightarrow x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\text{ modulo } \pi\end{aligned}$$

  Donc la fonction $x \mapsto \ln(\sin(2x))$ est définie sur tous les intervalles $\left]k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right[$, pour $k \in \mathbb{Z}$. Sur chacun de ces intervalles, elle est dérivable, donc continue, comme composée de fonctions dérivables.